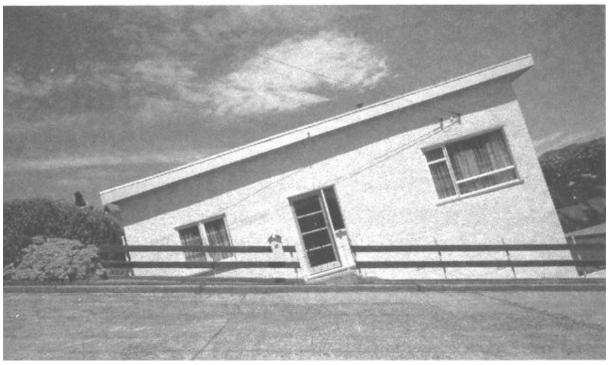
Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M1 – Lineare Funktionen - Selbsteinschätzung**	Datum:

Dieses Modul ermöglicht dir, alle wichtigen Aspekte im Umgang mit linearen Funktionen zu wiederholen und intensiv zu üben. Bevor du anfängst zu üben, solltest du eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 abgeben (erste Spalte in der unteren Tabelle).
Anschließend kannst du in deinem Lerntagebuch die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennst du deine Stärken und Schwächen und kannst gezielt die Standard- und die vertiefenden Aufgaben zu diesem Modul üben.



Selbsteinschätzung

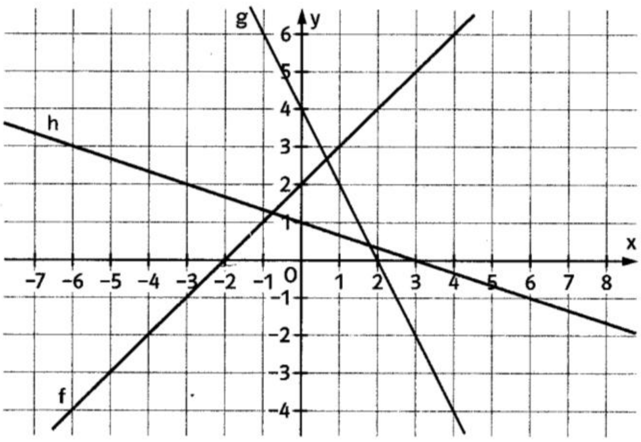
	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Moduls
1. Ich kann die Gleichung einer Geraden angeben, deren Graph in einem Koordinatensystem abgebildet ist.			
2. Ich kann die Gleichung einer Geraden in der Form $y = mx + n$ bestimmen, wenn die Steigung und ein Punkt auf der Geraden gegeben ist.			
3. Ich kann die Gleichung einer Geraden in der Form $y = mx + n$ bestimmen, wenn zwei Punkte gegeben sind, die auf der Geraden liegen.			
4. Ich kann zu einer gegebenen Geradengleichung der Form $y = mx + n$ die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem einzeichnen.			
5. Ich kann die Steigung einer Geraden bestimmen, wenn der Steigungswinkel gegeben ist, und umgekehrt.			
6. Ich kann lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen.			
7. Ich kann den Schnittpunkt von zwei Geraden bestimmen, die in der Form $y = mx + n$ gegeben sind.			
8. Ich kann lineare Funktionen aufstellen, die Anwendungskontexte beschreiben und mithilfe der Funktionsgleichungen Probleme im Anwendungskontext lösen.			

Viel Erfolg

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M1 – Lineare Funktionen - Testaufgaben**	Datum:

Die Aufgaben 1 – 8 beziehen sich auf die Punkte 1 – 8 der Selbsteinschätzung. Bearbeite die Aufgaben und kontrolliere dann deine Lösung mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten.

1 Bestimme die Gleichungen der abgebildeten Geraden in der Form y = mx + n.



f: y = ________ g: y = ________ h: y = ________

2 Bestimme die Gleichung der Geraden in der Form y = mx + n.

a) m = 2; die Gerade verläuft durch P(3|7)

b) m = –1,5; die Gerade verläuft durch Q(–1|–4)

a) y = ______________ b) y = ______________

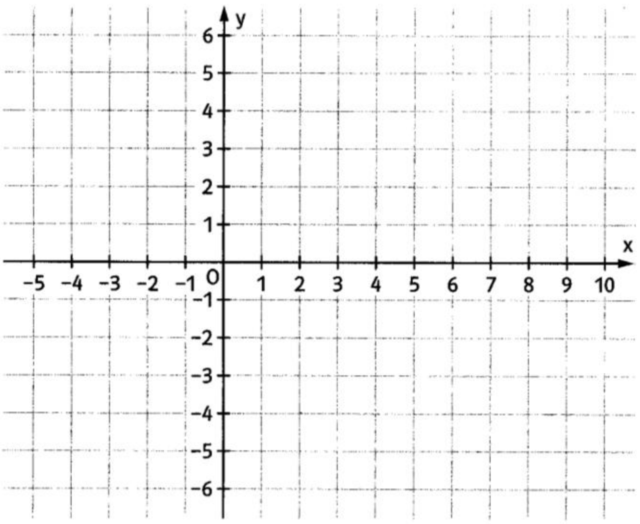
3 Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte A und B verläuft, in der Form y = mx + n.

a) A(2|4); B(3|8) b) A(6|–2); B(9|–9)

a) y = ______________ b) y = ______________

4 Zeichne die Graphen der folgenden linearen Funktionen in das Koordinatensystem.

$f(x) = 2x - 1$; $g(x) = -3x + 2$; $h(x) = \frac{2}{3}x - 2$



5 a) Bestimme die Steigung der Geraden mit dem Steigungswinkel α.

(I) α = 60° (II) α = –30° (III) α = 150°

(I) m ≈ ______________

(II) m ≈ ______________

(III) m ≈ ______________

b) Bestimme den Steigungswinkel α.

(I) $f(x) = 2x + 3$ (II) $f(x) = -x + 4$

(I) α ≈ __________ (II) α ≈ __________

6 Bestimme die Lösung der Gleichung.

a) $11x - 22 = 23x - 10$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{12}$

a) x = __________ b) x = __________

7 Bestimme den Schnittpunkt der Geraden f und g.

a) $f(x) = 3x - 4$; $g(x) = -2x + 6$

b) $f(x) = -2x + 11$; $g(x) = 5x + 1$

a) S(____ | ____) b) S(____ | ____)

8 a) Bestimme zu den beiden Telefontarifen jeweils eine Funktionsvorschrift, mit der man die Telefonkosten in Euro für x Minuten berechnen kann.

b) Berechne, wie viele Minuten man im Monat telefonieren muss, damit Tarif A günstiger ist als Tarif B.

Tarif A:
Monatliche Grundgebühr: 10,50€
Minutenpreis (in alle Netze): 19 Cent

Tarif B:
Monatliche Grundgebühr: 5,50€
Minutenpreis (in alle Netze): 24 Cent

a) Tarif A: y = ______________________

Tarif B: y = ______________________

b) Antwort: ______________________

____

____

____

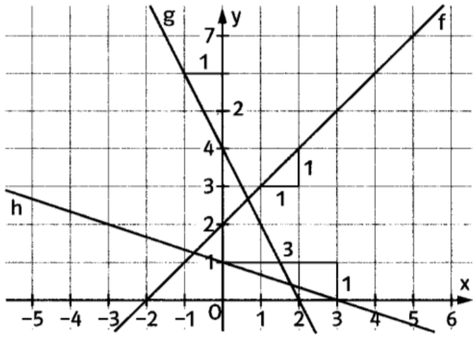
Viel Erfolg

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M1 – Lineare Funktionen – Lösungen**	Datum:

Kontrolliere mithilfe der folgenden Musterlösungen deine Lösungen der Testaufgaben. Führe dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich linearer Funktionen und Gleichungen durch.

1 Geradengleichungen anhand des Graphen bestimmen

Gerade f:
Die y-Achse wird bei y = 2 geschnitten, somit ist der y-Achsenabschnitt n = 2. Wenn man ein Steigungsdreieck einzeichnet, bei dem man eine Einheit nach rechts geht, dann muss man auch eine Einheit nach oben gehen (siehe Abbildung). Die Steigung ist somit m = 1.
Also gilt $y = 1x + 2$ bzw. $y = x + 2$.



Gerade g:
y-Achsenabschnitt n = 4.
Wenn man ein Steigungsdreieck einzeichnet, bei dem man eine Einheit nach rechts geht, dann muss man zwei Einheiten nach unten gehen (siehe Abbildung). Die Steigung ist somit $m = -2$.
Also gilt $y = -2x + 4$.

Gerade h:
y-Achsenabschnitt n = 1. Um die Steigung zu bestimmen, ist es hier günstig, ein Steigungsdreieck zu zeichnen, bei dem man drei Einheiten nach rechts und eine Einheit nach unten geht (siehe Abbildung). Hieraus folgt, dass die Steigung $m = -\frac{1}{3}$ beträgt.
Also gilt $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Normalform von Geraden:
$y = mx + n$

Steigung m:
Eine Einheit nach rechts → m Einheiten nach oben bzw. nach unten, wenn m negativ ist.

Steigungsdreieck bei Brüchen:
Wenn $m = \frac{b}{a}$ gilt, kann man ein Steigungsdreieck zeichnen, bei dem man a Einheiten nach rechts und b nach oben geht (bzw. nach unten, wenn der Bruch negativ ist).

y-Achsenabschnitt n:
Die Gerade schneidet die y-Achse in P(0 | n).

2 Geradengleichungen mit der Steigung und einem Punkt bestimmen

a) Die Steigung $m = 2$ ist gegeben, somit gilt $y = 2x + n$.
Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, kann man die Koordinaten des gegebenen Punktes P(3 | 7) für x und y in die Gleichung einsetzen.
Man erhält:

$7 = 2 \cdot 3 + n$
$7 = 6 + n \quad | -6$
$1 = n$

Also gilt $y = 2x + 1$.

b) Die Steigung $m = -1{,}5$ ist gegeben, somit gilt $y = -1{,}5x + n$.
Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, kann man die Koordinaten des gegebenen Punktes Q(−1 | −4) für x und y in die Gleichung einsetzen.
Man erhält:

$-4 = -1{,}5 \cdot (-1) + n$
$-4 = 1{,}5 + n \quad | -1{,}5$
$-5{,}5 = n$

Also gilt $y = -1{,}5x - 5{,}5$.

y-Achsenabschnitt n bestimmen:
m und die Koordinaten eines Punktes in die Normalform $y = mx + n$ einsetzen und nach n auflösen.

3 Geradengleichungen mithilfe von zwei Punkten bestimmen

a) Die Steigung lässt sich aus den gegebenen Punkten berechnen:
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = \frac{4}{1} = 4.$
Somit gilt $y = 4x + n$.
n lässt sich berechnen, indem man z. B. die Koordinaten von A(2 | 4) einsetzt:

$4 = 4 \cdot 2 + n$
$4 = 8 + n \quad | -8$
$-4 = n$

Also gilt $y = 4x - 4$.

b) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-9 - (-2)}{9 - 6} = \frac{-9 + 2}{3} = -\frac{7}{3}$
Somit gilt $y = -\frac{7}{3}x + n$.
Berechnung von n durch Einsetzen der Koordinaten von B(9 | −9):

$-9 = -\frac{7}{3} \cdot 9 + n$
$-9 = -21 + n \quad | +21$
$12 = n$

Also gilt $y = -\frac{7}{3}x + 12$.

Berechnung der Steigung mithilfe von zwei Punkten $A(x_A | y_A)$ und $B(x_B | y_B)$:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

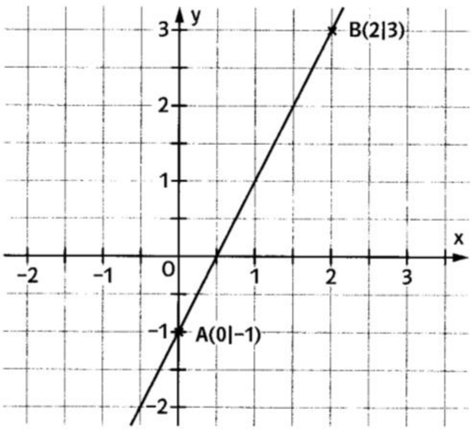
oder

$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

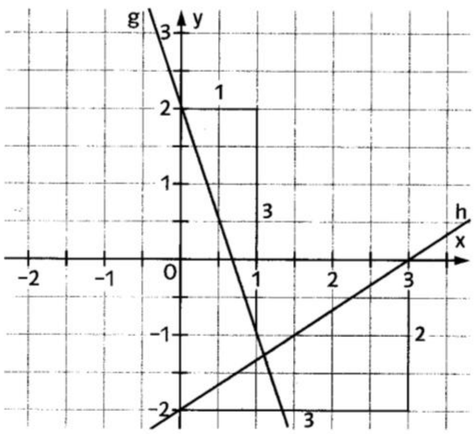
Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M1 – Lineare Funktionen – Lösungen**	Datum:

4 Geraden zeichnen

a) Man kann die Gerade zeichnen, indem man zwei Punkte A und B bestimmt, die auf der Geraden liegen und diese verbindet. Je weiter die Punkte auseinanderliegen, desto genauer wird die Zeichnung.
Wenn man $x = 0$ einsetzt, erhält man $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$. Also liegt der Punkt $A(0\,|\,-1)$ auf der Geraden.
Wenn man $x = 2$ einsetzt, erhält man $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Also liegt der Punkt $B(2\,|\,3)$ auf der Geraden.
Mit A und B erhält man den Graphen der zugehörigen Funktion (vgl. folgende Abbildung):



b) Man kann den Graphen zeichnen, indem man zunächst den y-Achsenabschnitt, d. h. $P(0\,|\,2)$, ins Koordinatensystem einträgt. Von dort aus zeichnet man ein Steigungsdreieck (eine Einheit nach rechts und drei Einheiten nach unten) und kann den Graphen einzeichnen (siehe folgende Abbildung).
c) Man kann ausgehend von $P(0\,|\,-2)$ ein Steigungsdreieck zeichnen. Da die Steigung ein Bruch ist, bietet es sich an, den Nenner (3 Einheiten) nach rechts und den Zähler (2 Einheiten) nach oben zu gehen (vgl. folgende Abbildung).



1. Möglichkeit:
Man bestimmt mithilfe der Funktionsgleichung zwei Punkte auf dem Graphen und verbindet diese zu einer Geraden.

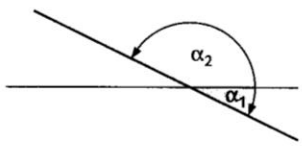
2. Möglichkeit:
Man zeichnet zunächst den y-Achsenabschnitt ein und zeichnet von dort aus ein Steigungsdreieck.

5 Steigung und Steigungswinkel

a) (I) $m = \tan(60°) \approx 1{,}73$
(II) $m = \tan(-30°) \approx -0{,}58$
(III) $m = \tan(150°) \approx -0{,}58$
Ein Steigungswinkel von 150° entspricht der gleichen Steigung wie ein Steigungswinkel von −30° (siehe Abbildung auf der Mariginalie).

b) (I) $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}43°$
(II) $\alpha_1 = \tan^{-1}(-1) \approx -45°$
bzw. $\alpha_2 = 180° - 45° = 135°$ (siehe Abbildung auf der Mariginalie)
Bei negativen Steigungen kann man den negativen Winkel zwischen 0° und 90° angeben oder einen positiven Winkel zwischen 90° und 180°.

Steigung und Steigungswinkel:
$m = \tan(\alpha)$
$\alpha = \tan^{-1}(m)$
Der Taschenrechner muss auf DEGREE eingestellt sein.



6 Lineare Gleichungen lösen

a)
$$\begin{aligned} 11x - 22 &= 23x - 10 && \mid +22 \\ 11x &= 23x + 12 && \mid -23x \\ -12x &= 12 && \mid :(-12) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Probe:
$$\begin{aligned} 11 \cdot (-1) - 22 &= 23 \cdot (-1) - 10 \\ -33 &= -33 \end{aligned}$$

Man erhält eine wahre Aussage, also ist die berechnete Lösung richtig.

b)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x + \tfrac{3}{4} &= -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{23}{12} && \mid -\tfrac{3}{4} \\ \tfrac{1}{3}x &= -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{23}{12} - \tfrac{3}{4} && \mid +\tfrac{1}{4}x \\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x &= \tfrac{23}{12} - \tfrac{3}{4} \\ \tfrac{4}{12}x + \tfrac{3}{12}x &= \tfrac{23}{12} - \tfrac{9}{12} \\ \tfrac{7}{12}x &= \tfrac{14}{12} && \mid \cdot \tfrac{12}{7} \\ x &= \tfrac{14}{12} \cdot \tfrac{12}{7} = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{1}{1} = 2 \end{aligned}$$

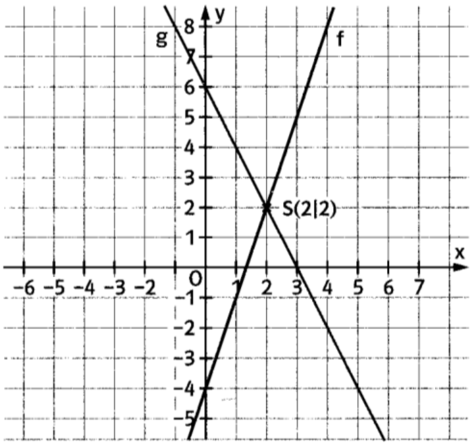
Probe:
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} \cdot 2 + \tfrac{3}{4} &= -\tfrac{1}{4} \cdot 2 + \tfrac{23}{12} \\ \tfrac{17}{12} &= \tfrac{17}{12} \text{ (wahr)} \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen so durchführen, dass x auf einer Seite alleine steht.
Zur Sicherheit kann man eine Probe machen, indem man die Lösung in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M1 – Lineare Funktionen – Lösungen**	Datum:

7 Schnittpunkte von Geraden bestimmen

a) Zeichnerische Lösung:



Der Zeichnung entnimmt man den Schnittpunkt S(2 | 2). Eine Probe zeigt, dass diese Lösung richtig ist, denn:
$f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$
$g(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$
Zeichnerische Lösungen sind leider oft aufwändig und ungenau.

b) Rechnerische Lösung:
1. Gleichsetzen
Man setzt die Funktionsterme von f und g gleich, um die x-Koordinate des Schnittpunktes zu bestimmen.
$-2x + 11 = 5x + 1$
2. Lösen der Gleichung

$$
\begin{aligned}
-2x + 11 &= 5x + 1 && \mid -5x \\
-7x + 11 &= -10 && \mid -11 \\
-7x &= -10 && \mid :(-7) \\
x &= \tfrac{10}{7}
\end{aligned}
$$

3. Berechnen des y-Wertes
Den y-Wert des Schnittpunktes erhält man, indem man den berechneten x-Wert in eine der beiden Funktionsterme einsetzt, z. B. in f:
$f\left(\frac{10}{7}\right) = -2 \cdot \frac{10}{7} + 11 = -\frac{20}{7} + \frac{77}{7} = \frac{57}{7}$.
Der Schnittpunkt lautet also $S\left(\frac{10}{7} \middle| \frac{57}{7}\right)$.
Zur Kontrolle kann man den berechneten x-Wert in den zweiten Funktionsterm einsetzen.

Zeichnerische Lösung:
Man zeichnet beide Graphen und liest den Schnittpunkt ab.
Diese Methode liefert oft nur ungenaue Ergebnisse.

Rechnerische Lösung:
1. Funktionsterme gleichsetzen.
2. Gleichung lösen, um den x-Wert des Schnittpunktes zu bestimmen.
3. y-Wert mit einem der Funktionsterme durch Einsetzen des x-Wertes berechnen.

8 Lineare Funktionen in Anwendungskontexten

a) Der Minutentarif entspricht dem Kostenzuwachs pro Minute, also der Steigung. Die Grundgebühr entspricht dem y-Achsenabschnitt, d.h. den Kosten, die entstehen, wenn man 0 Minuten telefoniert. Wenn man alle Preisangaben aus der Aufgabe in Euro umrechnet, erhält man folgende Geradengleichungen, die die Kosten pro Monat (in Euro) bei x Gesprächsminuten pro Monat angeben:
Tarif A: $y = 0{,}19x + 10{,}5$
Tarif B: $y = 0{,}24x + 5{,}5$

Alternativ kann man auch zwei Punkte bestimmen, die zum Graphen eines Tarifs gehören, und mit diesen Punkten die Geradengleichungen berechnen. Für Tarif A kann man z. B. die Punkte A(0 | 10,5) und B(1 | 10,69) bestimmen, denn bei 0 Minuten zahlt man 10,50 € und bei einer Minute 10,50 € + 0,19 € = 10,69 €.
Mit A und B kann man berechnen, dass m = 0,19 und n = 10,5 ist (vgl. Lösung zu Aufgabe 3).

b) Die x-Koordinate des Schnittpunkts der Geraden aus a) entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Kosten bei beiden Tarifen gleich sind.
Berechnung des Schnittpunktes der beiden Geraden:

$$
\begin{aligned}
0{,}19x + 10{,}5 &= 0{,}24x + 5{,}5 && \mid -0{,}24x \\
-0{,}05x + 10{,}5 &= 5{,}5 && \mid -10{,}5 \\
-0{,}05x &= -5 && \mid :(-0{,}05) \\
x &= 100
\end{aligned}
$$

$y = 0{,}19 \cdot 100 + 10{,}5 = 29{,}5$
Also gilt S(100 | 29,5).
Wenn man 100 Minuten im Monat telefoniert, sind die Kosten mit 29,50 € bei beiden Tarifen gleich hoch. Da der Minutenpreis bei Tarif A günstiger ist, lohnt sich Tarif A, wenn man mehr als 100 Minuten (also eine Stunde und 40 Minuten) monatlich telefoniert.

Geradengleichung im Anwendungskontext bestimmen:
Die Steigung entspricht der Veränderung pro Einheit. Der y-Achsenabschnitt entspricht dem y-Wert, den man für x = 0 erhält.

Einheiten beachten:
Wenn man Terme aufstellt oder gleichsetzt, müssen die Einheiten bei allen Werten gleich sein.